

# Alma Mater Studiorum Università degli Studi di Bologna

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Materia Degenere:  
Fisica e Applicazioni Astrofisiche

Elaborato Finale

Tesi di:  
Giovanni Aricò

Relatore:  
Prof. Daniele Dallacasa



---

---

Sessione Laurea II, Autunnale  
Anno Accademico 2013/2014



*Alla mia famiglia*



## **Sommario**

Con la presente Tesi si vuole trattare lo Stato Degenero della materia. Nella prima parte si presenteranno le caratteristiche fisiche principali: limite di non degenerazione, differenze tra bosoni e fermioni, equazioni di stato e distribuzioni di velocità. Nella seconda parte si introdurranno i risvolti astrofisici più interessanti: pressione negli interni stellari, nane bianche, stelle di neutroni e Supernovae di tipo Ia.

# Indice

<b>1</b>	<b>Fisica della Materia Degenera</b>	<b>1</b>
1.1	Condizioni per la Degenerazione . . . . .	1
1.2	Bosoni e Fermioni . . . . .	2
1.3	Il Potenziale Chimico . . . . .	2
1.4	Limite del Continuo nella Degenerazione . . . . .	3
1.5	Degenerazione nei Fermioni . . . . .	4
1.5.1	Il Livello di Fermi . . . . .	4
1.5.2	Conduttori e Non Conduttori . . . . .	5
1.5.3	Distribuzione di Fermi-Dirac . . . . .	5
1.6	Degenerazione nei Bosoni . . . . .	7
1.6.1	Condensazione di Bose . . . . .	7
1.6.2	Bosoni senza massa . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Applicazioni Astrofisiche</b>	<b>9</b>
2.1	Pressione negli interni stellari . . . . .	9
2.1.1	Pressione di Radiazione . . . . .	9
2.1.2	Pressione di Degenerazione . . . . .	9
2.1.3	Diagramma $\log\rho$ - $\log T$ . . . . .	11
2.2	Evoluzione Stellare . . . . .	12
2.2.1	Limite di Chandrasekhar . . . . .	13
2.2.2	Supernovae di tipo Ia . . . . .	15
	<b>Bibliografia</b>	<b>16</b>

# Capitolo 1

## Fisica della Materia Degenere

### 1.1 Condizioni per la Degenerazione

La Degenerazione è uno stato della materia che subentra in particolari condizioni ambientali (di Temperatura e Pressione). Un gas non degenere ideale avrà una distribuzione di velocità di Maxwell-Boltzmann e seguirà l'Equazione di Stato dei Gas Perfetti; come si vedrà, invece, per un gas degenere non vale nè l'una, nè l'altra relazione. Il discriminante tra Stato Degenere e Stato Non Degenere è il

*Limite di Non Degenerazione:*

Considerando un Sistema che abbia  $N$  particelle, con una popolazione di equilibrio  $n_\alpha$  del livello energetico  $\epsilon_\alpha$ , e una molteplicità di Stati per livello  $g_\alpha$ , il Limite di Non Degenerazione è rispettato per valori dell'Indice di Occupazione molto bassi, ovvero

$$\frac{n_\alpha}{g_\alpha} \ll 1 \quad (1.1)$$

Quando questa condizione non è rispettata, si parla di Sistema Degenere. Si può dimostrare che per i Gas Perfetti il limite diventa:

$$\eta = \frac{h^3 N}{V(2\pi m k T)^{3/2}} \ll 1 \quad (1.2)$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $k$  la costante di Boltzmann. In altri termini, si può pensare che gli effetti quantistici (e dunque la degenerazione) non influiscano fintantochè la distanza media tra due particelle è molto maggiore della loro lunghezza d'onda di de Broglie, ovvero

$$d \gg \frac{h}{(2mkT)^{1/2}} \quad (1.3)$$

## 1.2 Bosoni e Fermioni

Dalla 1.2 si può notare che la Degenerazione è favorita da alte densità e basse temperature.

A livello microscopico, la differenza tra materia degenere e non degenere è da ricercarsi nel grado di occupazione degli stati quantici per ogni livello energetico. Per valori alti del grado di occupazione, ovvero per materia fortemente degenere, si hanno dei comportamenti molto differenti a seconda della natura delle particelle quantiche che compongono il Sistema. Ve ne possono essere di due tipi: i bosoni, dotati di spin intero, ed i fermioni, caratterizzati da uno spin semi-intero.

La fondamentale differenza tra bosoni e fermioni è che per i secondi vale il *Principio di esclusione di Pauli*: due fermioni identici non possono occupare simultaneamente lo stesso stato quantico.

Il comportamento bosonico è descritto dalla Statistica di Bose-Einstein, quello fermionico dalla Statistica di Fermi-Dirac: si può ricavare che, per la conservazione del numero  $N$  di particelle di un gas

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_{\alpha}^{\pm} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} \pm 1} \quad (1.4)$$

dove  $\beta=1/kT$  e  $\mu$  è un parametro detto Potenziale Chimico. In quest'equazione e nelle seguenti, si riferisce per convenzione il segno superiore alla Statistica di Fermi-Dirac e quello inferiore alla Statistica di Bose-Einstein.

## 1.3 Il Potenziale Chimico

Il Potenziale Chimico della 1.4 è lo stesso che appare nel Primo Principio della Termodinamica per sistemi Gran-Canonici (sistemi che possono scambiare tra loro sia calore che particelle):

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \quad (1.5)$$

In altri termini, il Potenziale Chimico è l'energia che occorre fornire (o sottrarre) al sistema per inserire nuove particelle, mantenendo Volume  $V$  e Entropia  $S$  costante

$$\mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V} \quad (1.6)$$

o anche

$$\mu = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{T,V} \quad (1.7)$$



dove  $\Phi$  è l'*Energia Libera di Helmholtz*, una Funzione di Stato definita come segue:

$$\Phi(T, V) = E - TS \quad (1.8)$$

Dalla 1.4, si ricava che  $\mu \leq 0$  per i bosoni, altrimenti la popolazione del livello fondamentale ( $\epsilon=0$ ) sarebbe negativa, il che è ovviamente assurdo. Per i fermioni  $\mu$  può essere anche positivo: ciò è una conseguenza diretta del principio di esclusione di Pauli, che in caso di degenerazione rende energeticamente sfavorevole l'aggiunta di altri fermioni; come vedremo più avanti, ciò porterà macroscopicamente ad una Pressione, denominata Pressione di Degenerazione.

## 1.4 Limite del Continuo nella Degenerazione

Nel caso degenere è possibile applicare il Limite del Continuo per la sola parte traslazionale dello spettro, mantenendo spin ed altri eventuali gradi di libertà interni quantizzati: si avrà un'Hamiltoniana per la singola particella

$$H(p, r, \vec{\xi}) = \frac{p^2}{2m} + H_{int}(\vec{\xi}) \quad (1.9)$$

per cui nel Limite del Continuo

$$\epsilon_\alpha \rightarrow \epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}}, \quad (1.10)$$

$$g_\alpha \rightarrow g_{\vec{\xi}} g(\epsilon) d\epsilon, \quad (1.11)$$

dove  $g(\epsilon)$  è la densità degli stati traslazionali e  $\epsilon \geq 0$ . Da qui si ha che la 1.4 può essere così riscritta:

$$N = \sum_{\vec{\xi}} g_{\vec{\xi}} \int_0^\infty d\epsilon \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} - \mu)} \pm 1} \quad (1.12)$$

E' possibile studiare gli effetti perturbativi della degenerazione sulla legge dei gas perfetti, nel Limite del Continuo, sviluppando in serie di potenze in  $\eta$  le funzioni termodinamiche degeneri.

Lo sviluppo al primo ordine perturbativo porta al seguente risultato:

$$\frac{PV}{NkT} = 1 \pm \frac{1}{2^{5/2}} \left( \frac{\eta}{g_{int}} \right) + o(\eta^2) \quad (1.13)$$

dove  $g_{int} = \sum_{\vec{\xi}} g_{\vec{\xi}}$  è il numero totale di stati interni della singola particella.

Si può notare, come accennato in precedenza, che il caso fermionico apporta una correzione positiva alla Pressione.

## 1.5 Degenerazione nei Fermioni

### 1.5.1 Il Livello di Fermi

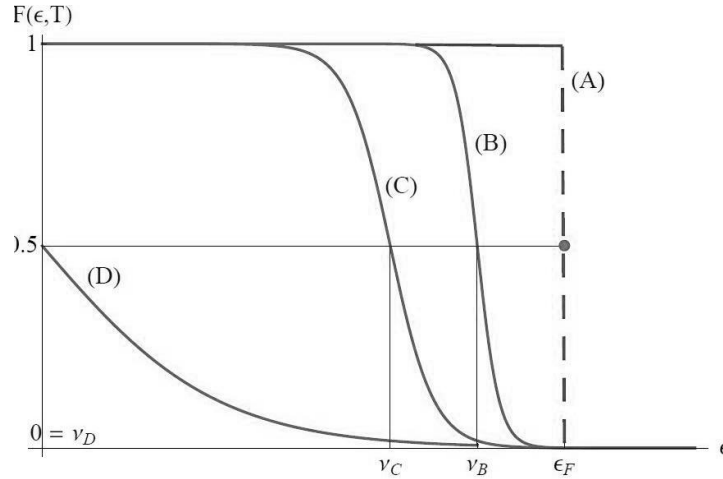
Si definisce come segue la *Funzione di Occupazione*:

$$F(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad (1.14)$$

La Funzione d'Occupazione rappresenta la percentuale di stati occupati a una certa energia. Si definisce *Livello di Fermi* l'energia

$$\epsilon_F = \lim_{T \rightarrow 0} \mu(T) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^3 N}{V} \right)^{2/3} \quad (1.15)$$

A temperature bassissime ( $T \rightarrow 0$ ) si nota che  $F(\epsilon, T) = 1$  per tutti gli  $\epsilon < \epsilon_F$ , e  $F(\epsilon, T) = 0$  per tutti  $\epsilon > \epsilon_F$ ; in altre parole, a  $T=0$  tutti gli stati meno energetici del livello di Fermi sarebbero occupati, e non vi sarebbe nessuno stato occupato più energetico del livello di Fermi. Ciò è intuibile dal principio di esclusione, che non permette a tutti i fermioni di stare al livello fondamentale e quindi, a partire dal livello più basso si occupano tutti gli altri fino ad un livello limite: il livello di Fermi. Alzando la Temperatura, ma rimanendo in condizioni di forte degenerazione, la funzione diventa una curva continua che scende rapidamente. Alzando ulteriormente la temperatura, i livelli energetici (anche i più bassi) iniziano a non essere completi, e la curva si riduce al fattore esponenziale della Maxwell-Boltzmann.



**Figura 1.1:** Funzione d'Occupazione al variare della Temperatura: per la (A)  $T=0$  e  $\mu = \epsilon_F$ , per la (B) e la (C)  $kT \ll \mu$  e  $\mu > 0$ , per la (D)  $\mu = 0$ .

### 1.5.2 Conduttori e Non Conduttori

La Statistica di Fermi-Dirac è utilizzata per studiare il comportamento degli elettroni nei materiali solidi, poichè in questi casi la loro densità è sufficiente a indurre una forte degenerazione alle temperature ambientali ( $10^{22}cm^{-3}$ ). Gli elettroni presi in considerazione sono solo quelli di valenza, ovvero i più esterni all'atomo, coinvolti anche nelle reazioni chimiche. Quando i nuclei atomici sono abbastanza vicini, gli elettroni mutano la loro funzione d'onda: non sono più legati al singolo atomo, ma hanno una funzione d'onda estesa assimilabile a quella di una particella libera. La densità degli stati elettronici nei materiali condensati è formata da bande di energia separate da gap, in cui non vi sono stati. In particolare, come si può evincere dalla *Teoria delle Bande*, da qui deriva la differenza tra materiali Conduttori e non Conduttori: nei primi il livello di Fermi cade in una banda, nei secondi al centro di un gap. Non tutti gli elettroni degeneri contribuiscono in maniera significativa alla conduzione termica/elettrica: difatti, poichè nei processi termici gli elettroni si scambiano energie dell'ordine di  $kT$ , gli elettroni in stati significativamente inferiori al livello di Fermi scambiando energia verrebbero a trovarsi in stati già occupati, in violazione al principio di esclusione. Il loro contributo alla conduzione è perciò nullo, vengono infatti denominati elettroni 'congelati'. Al contrario, gli elettroni in stati superiori al livello di Fermi sono in bande scarsamente popolate, e per questo chiamati elettroni 'efficaci': sono i responsabili dei fenomeni termici ed elettrici.

Procedendo al calcolo del numero di elettroni efficaci nei conduttori e nei non conduttori, si ottengono i seguenti risultati:

$$N_{eff}^{cond} \propto T^{2n+1}; \quad N_{eff}^{ncnd} \propto T^{\gamma_2} e^{-\beta\epsilon_g/2}; \quad (1.16)$$

dove  $\epsilon_{gap}$  è la larghezza del gap e  $\gamma_2$  è un parametro dovuto allo sviluppo in termini necessario ai passaggi matematici. Si può notare il taglio esponenziale proporzionale alla larghezza del gap presente nel caso dei non conduttori, da cui scaturiscono le profonde differenze macroscopiche con i conduttori.

### 1.5.3 Distribuzione di Fermi-Dirac

Si vuole ora studiare la distribuzione della quantità di moto per la Statistica di Fermi-Dirac:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{e^{\left(\frac{p^2}{2mkT} - \psi\right)} + 1} dp \quad (1.17)$$

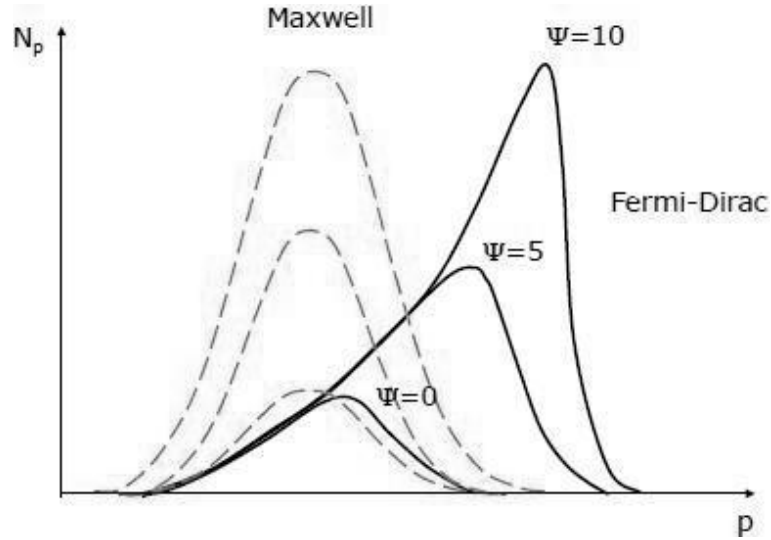
$\psi$  è il cosiddetto *Parametro di Degenerazione*:

$$\psi \propto \frac{\mu}{kT} \propto \frac{1}{kT} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (1.18)$$

Per quanto detto in precedenza per  $\mu$ ,  $\psi$  sarà un numero reale positivo tanto più grande quanto più degenere sarà il sistema, sarà invece negativo per un sistema non degenere.

Graficando la distribuzione al variare del Parametro di Degenerazione, si confronta l'andamento della Fermi-Dirac al limite di non degenerazione (Maxwell-Boltzmann) con quello per  $\psi$  positivi, ottenendo la figura 1.2:

nella maxwelliana il massimo delle velocità non varia, cambia solo il numero delle particelle ad un dato  $p$ ; ciò non accade in condizioni di Degenerazione, in cui varia il numero di particelle per quantità di moto, ma si sposta anche il picco verso velocità più elevate al crescere del Parametro di Degenerazione, poichè gli stati con quantità di moto inferiori risultano già occupati.



**Figura 1.2:** Andamento della distribuzione di Fermi-Dirac per  $\psi$  positivi e crescenti in confronto alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann, a Temperatura costante e Densità crescente

## 1.6 Degenerazione nei Bosoni

### 1.6.1 Condensazione di Bose

La particolarità dei bosoni sta nell'avere un livello fondamentale che nonostante abbia una molteplicità di stati finita può avere un numero estensivo di particelle. Nel caso bosonico non si avrà mai un potenziale chimico positivo, al massimo esso si annullerà. Al di sotto di una certa Temperatura critica chiamata *Temperatura di Bose* ( $T_B$ ) una percentuale consistente di bosoni vanno a finire nel livello fondamentale e il potenziale chimico si annulla: il processo è denominato condensazione di Bose-Einstein, e il suo risultato è uno stato della materia in cui gli effetti quantistici dominano macroscopicamente. In pratica è molto difficile realizzare un Condensato di Bose-Einstein, essendo  $T_B$  una minima frazione al di sopra dello Zero Assoluto, ma teoricamente si pensa che un tale condensato si comporti come un monoblocco di bosoni identici, che dissipando la sua energia collettivamente e non attraverso il campo (rendendo quindi il trasferimento energetico poco probabile) diventa un superfluido, che una volta messo in movimento continua a muoversi quasi indefinitamente.

Dall'equazione di Bose Einstein 1.4 si può calcolare la percentuale  $\rho_0$  di bosoni al livello fondamentale:

$$\rho_0 = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} & \text{per } T \leq T_B \\ 0 & \text{per } T \geq T_B \end{cases} \quad (1.19)$$

dove

$$T_B = \frac{h^2}{2k\pi m} \left( \frac{N}{\zeta(3/2)g_s V} \right)^{2/3} \quad (1.20)$$

in cui  $\zeta$  è la funzione Zeta di Riemann:

$$\zeta(3/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad (1.21)$$

Inoltre, ponendo  $\vartheta = \left(\frac{T}{T_B} - 1\right)$  si ha che

$$\mu = \begin{cases} -\mu_0 \vartheta^2 & \text{per } 0 \leq \vartheta \ll 1 \\ 0 & \text{per } \vartheta < 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

### 1.6.2 Bosoni senza massa

E' possibile rimuovere il vincolo di conservazione del numero di bosoni  $N$  ponendo  $\mu = 0$  in ogni stato termodinamico: ciò corrisponde a un gas di bosoni privi di massa, che possono essere creati o distrutti tramite semplici scambi di calore.

Si dimostra inoltre che ad ogni sistema di oscillatori armonici distinguibili e quantizzati si può far corrispondere un gas di bosoni indistinguibili e senza massa, ognuno dei quali porta un quanto di energia  $\hbar\omega$ . Se i bosoni in questione sono fotoni, si può pensare l'energia del campo elettromagnetico come una composizione di oscillatori armonici, e tramite la condizione di risonanza

$$\nu^2(n) = \frac{c^2}{4L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1.23)$$

si può ricavare l'Energia Libera di Helmholtz e l'Energia Fotonica per unità di Volume del Corpo Nero, un oggetto ideale capace di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica incidente:

$$\frac{\Phi_{CN}}{V} = kT \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) d\nu = -\frac{8\pi^5 (kT)^4}{45c^3 h^3} \quad (1.24)$$

$$\frac{E_{CN}}{V} = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu = -\frac{8\pi^5 (kT)^4}{15c^3 h^3} \quad (1.25)$$

da cui è facilmente ricavabile la *Formula di Planck*, ovvero il potere emissivo di un Corpo Nero:

$$P_{CN} = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (1.26)$$

Essendo le stelle stesse assimilabili a Corpi Neri, l'equazione 1.26 ha molteplici applicazioni in campo astrofisico, che qui non saranno trattate.

Tramite la medesima condizione 1.23, considerando i fononi come bosoni privi di massa, e dunque scomponendo in oscillatori armonici l'energia elastica dei materiali condensati, si può inoltre sviluppare il modello del Solido Elastico Continuo e la Teoria di Debye, che portano ad altri interessanti risvolti astrofisici.

# Capitolo 2

## Applicazioni Astrofisiche

### 2.1 Pressione negli interni stellari

#### 2.1.1 Pressione di Radiazione

Dall'equazione 1.25 si può ricavare anche la Pressione di un gas di bosoni: considerando un gas di Fotoni, essa non è altri che la Pressione di Radiazione:

$$P_{rad} = \frac{E_{CN}}{3V} = \frac{8\pi^5}{45c^3h^3} (kT)^4 \quad (2.1)$$

possiamo quindi scrivere

$$P_{rad} = \frac{aT^4}{3} \quad (2.2)$$

con  $a \approx 7.6 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ .

#### 2.1.2 Pressione di Degenerazione

Oltre alla Pressione di Gas Perfetto e alla Pressione di Radiazione precedentemente trattata, negli interni stellari vi può essere una Pressione dovuta alla Degenerazione della materia. Dalla Condizione di non Degenerazione 1.2 si può dedurre che la Degenerazione è favorita da una piccola massa delle particelle: perciò, in un gas ionizzato a causa delle alte temperature come quelle degli interni stellari vi sarà una probabilità più alta di trovare gli elettroni in stato di Degenerazione rispetto agli ioni positivi. Affinchè avvenga quest'ultimo caso occorreranno densità molto maggiori: si calcola perciò la Pressione per un gas composto di soli elettroni degeneri. In generale, per la Pressione  $P$  si ha

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p) p v dp \quad (2.3)$$

Inseriamo ora la distribuzione degenera, ovvero la 1.17 per  $\psi \rightarrow \infty$ .

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} \frac{8\pi}{h^3} p^3 v dp \quad (2.4)$$

dove  $p_0$  è il momento di Fermi, ossia la maggior quantità di moto possibile in condizioni di Degenerazione (collegato con l'energia di Fermi).

Si devono distinguere due casi:

per velocità elettroniche non relativistiche ( $p_0 \ll m_e c$ ) si può assumere  $p_0 = m_e v$ , e integrando si ottiene

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m} \frac{p_0^5}{5}; \quad (2.5)$$

nel caso relativistico ( $p_0 \sim m_e c$ ) si deve considerare  $p_0 = m_e \gamma v$ ,

dove  $\gamma = \left( \sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2} \right)^{-1}$  è il *fattore di Lorentz*. Integrando si ottiene

$$P = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4 \quad (2.6)$$

Ponendo  $N_e = \frac{\rho}{\mu_e H}$ , dove  $\mu_e$  è il peso molecolare medio elettronico<sup>1</sup>,  $H$  è la massa del protone e  $\rho$  è la densità totale del gas, dalla 1.2 si ottiene che

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h^3 \rho}{8\pi \mu H}} \quad (2.7)$$

Perciò, avremo che classicamente  $P = k_1 \rho^{\frac{5}{3}}$  mentre relativisticamente  $P = k_2 \rho^{\frac{4}{3}}$  con  $k_1 = 10^{13} \mu_e^{-\frac{5}{3}}$  e  $k_2 = 1.2 \cdot 10^{13} \mu_e^{-\frac{4}{3}}$ .

Si può notare che nel caso degenera la Pressione non dipende dalla Temperatura: se ne intuisce la causa pensando che è proprio la Temperatura a determinare la probabilità di occupazione dei livelli energetici; l'occupazione totale di tutti i livelli meno energetici di quello di Fermi elimina quindi la dipendenza dalla Temperatura. La non dipendenza dalla Temperatura fa sì che si possa studiare l'interno stellare integrando all'Equazione di Stato le sole Equazioni di Equilibrio Idrostatico e Continuità della Massa: è il caso particolare dei *Modelli Politropici*, la cui formula generale dell'Equazione di Stato è

$$P(\rho) = k \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.8)$$

dove  $n$  è l'*indice politropico*; nel caso degenera classico varrà  $n=1.5$ , in quello relativistico  $n=3$ .

---

<sup>1</sup>  $\mu_e = \frac{2}{X+1}$ , e dato che si hanno le condizioni di degenerazione principalmente nel nucleo di stelle evolute, in cui quasi tutto l'idrogeno è stato bruciato,  $X \approx 0$ , perciò  $\mu_e \approx 2$



### 2.1.3 Diagramma $\log\rho$ - $\log T$

Per il calcolo della Pressione Totale si devono quindi sommare diversi contributi: quelli dovuti alla Pressione di Radiazione e alla Pressione di Gas Perfetto dei nuclei atomici, e quelli dovuti alla componente elettronica. Di quest'ultima si distinguono tre casi: non degenerare, degenerare relativistico e degenerare non relativistico. Per capire quale contributo prevale sugli altri, è utile costruire un piano che metta in relazione Densità e Temperatura. Si andranno a delineare diversi settori uguagliando i vari contributi:

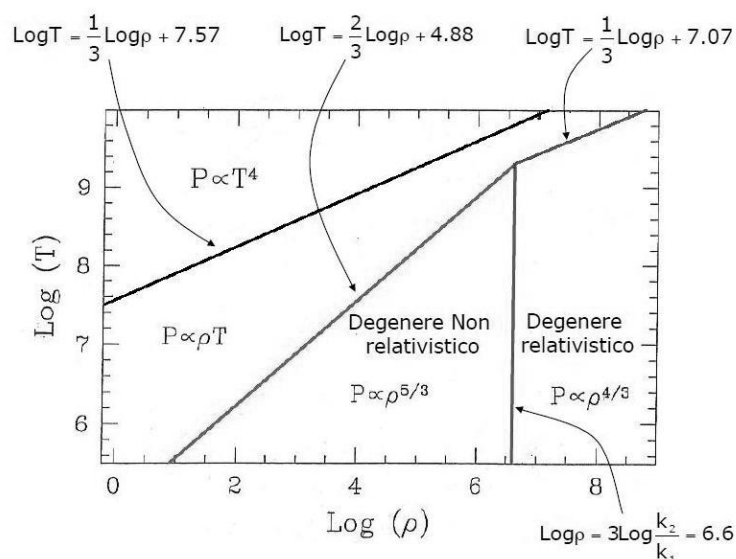
$$\frac{k\rho T}{\mu H} = \frac{a}{3}T^4 \Rightarrow \log T = \frac{1}{3}\log \rho + 7.57 \quad (2.9)$$

$$\frac{k\rho T}{\mu_e H} = k_1 \rho^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \log T = \frac{2}{3}\log \rho + 4.88 \quad (2.10)$$

$$k_1 \rho^{\frac{5}{3}} = k_2 \rho^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \log \rho = 6.6 \quad (2.11)$$

$$\frac{k\rho T}{\mu_e H} = k_2 \rho^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \log T = \frac{1}{3}\log \rho + 7.07 \quad (2.12)$$

Nel grafico 2.1, le stelle di Sequenza Principale si troverebbero nella zona non degenerare, dove la Pressione preponderante è quella di Gas Perfetto; le Giganti Rosse tra Gas Perfetto e Degenerare non Relativistico, le Nane Bianche tra Degenerare Classico e Relativistico.



**Figura 2.1:** Piano  $\text{Log}\rho$ - $\text{Log}T$

## 2.2 Evoluzione Stellare

Il fenomeno della Degenerazione è fondamentale per la comprensione e lo studio dell'evoluzione stellare. Esso si presenta in fasi evolutive via via più avanzate al crescere della massa stellare: infatti, con masse elevate si raggiungono a Densità inferiori le Temperature sufficienti a innescare le varie reazioni nucleari, che bilanciano la gravità senza Degenerazione impedendo ulteriori aumenti di densità. Le diverse tipologie di evoluzione stellare dipendono dunque dall'innescare delle reazioni nucleari in noccioli degeneri o meno: nel primo caso infatti, le reazioni risulterebbero particolarmente violente, capaci in qualche caso di distruggere la stella stessa.

- Per Masse  $M \leq 0.08M_{\odot}$  la Degenerazione subentra prima ancora del bruciamento dell'Idrogeno: per  $M \geq 13M_J$  (Masse Gioviene) si innescerà la fusione del Deuterio, e per  $M \geq 65M_J$  quella del Litio. Questi oggetti non diverranno mai vere e proprie stelle: la loro contrazione sarà fermata dalla Pressione di Degenerazione prima di raggiungere temperature sufficienti all'innescare della fusione dell'Idrogeno, e si raffredderanno lentamente come Nane Brune.
- Per  $0.08M_{\odot} \leq M \leq 2M_{\odot}$  il nucleo diventa Degenere quando il bruciamento dell'Idrogeno è già avvenuto: vi sarà dunque un nucleo di Elio degenero. La fusione dell'Elio (3) sarà ritardata dalla Degenerazione, ovvero vi sarà una fase molto più lunga di RGB (*Red Giant Branch*), ma quando avverrà sarà particolarmente violenta (Flash dell'Elio), tale da rimuovere la Degenerazione ma non da distruggere la stella. Alla fine della loro vita queste stelle espelleranno l'*envelope*, che andrà a formare una Nebulosa Planetaria; il *core* invece sussisterà come una sfera di Elio per le stelle meno massicce ( $M < 0.5 M_{\odot}$ )<sup>2</sup> o più frequentemente come una sfera di Carbonio e Ossigeno, sostenuto dalla Pressione degenero degli elettroni: si è formata una nana bianca.
- Per  $2M_{\odot} \leq M \leq 8M_{\odot}$  la Degenerazione subentra ancora dopo, quando il *core* della stella è composto principalmente di Carbonio e Ossigeno. Al centro della Nebulosa Planetaria rimarrà una nana bianca al C-O, il tipo di nana

---

<sup>2</sup> stelle di massa così piccola hanno tempi di vita così lunghi da essere paragonabili all'età dell'Universo: se ne spiega l'osservazione tramite un altro meccanismo di formazione, che prevede una binaria in cui una componente accresce del materiale dall'altra, privandola dell'involuppo e lasciandone solo il nucleo di Elio.

bianca più comune nell'Universo.

- Stelle con  $8M_{\odot} \leq M \leq 11M_{\odot}$  sviluppano un nocciolo non degenere di Carbonio e Ossigeno, ma una volta bruciato tutto il Carbonio formano un nucleo degenere di Neon e Ossigeno. Infine rimarrà quindi una Nana Bianca composta di Neon e Ossigeno, o, in rari casi in cui si innesca la fusione parziale del Neon in Magnesio, una nana bianca all'O-Ne-Mg.
- Con  $11M_{\odot} \leq M \leq 25M_{\odot}$  si riescono a raggiungere le Temperature sufficienti a innescare tutte le reazioni nucleari fino al Ferro. Il Ferro è l'elemento più stabile in natura, la sua fusione quindi non rilascia energia, ma ne richiede. Il nucleo inizia a collassare: Densità e Temperatura continuano ad aumentare, la fotodisintegrazione nucleare a opera dei raggi gamma prodotti dalla radiazione di Corpo Nero è anch'essa energeticamente sfavorevole, si attiva il processo Urca, che fa reagire elettroni e protoni formando neutroni e neutrini. Questo processo ha il doppio effetto di far diminuire gli elettroni liberi che potrebbero contribuire a una Pressione di Degenerazione elettronica e di provocare una forte perdita di energia tramite i neutrini, che attraversano tutta la stella a velocità prossime a quelle della luce. Il nucleo di Ferro è in caduta libera, ma viene fermato dalla Pressione di Degenerazione dei neutroni, formati in gran numero dallo stesso processo Urca. Tutto il materiale esterno al nucleo di Ferro collassa data la mancanza del sostegno del *core*, rimbalza sul nucleo supercompatto e viene espulso a grandissime velocità nello spazio interstellare, con un esplosione detta *Supernova di tipo II*: tramite questo meccanismo, il mezzo interstellare viene arricchito di tutti gli elementi presenti in Natura, prodotti durante la vita della stella e dall'esplosione stessa. Il nucleo è ora sostenuto dalla Pressione di Degenerazione del gas di neutroni di cui è in larga parte composto, in rapida rotazione in conseguenza della conservazione del momento angolare: una Stella di Neutroni.
- Per  $M \geq 25M_{\odot}$  neanche la Pressione di Degenerazione dei neutroni può controbilanciare il collasso; si forma un buco nero (anche se ipotesi recenti inseriscono tra stella di neutroni e buco nero uno stato intermedio: la stella di quark, un oggetto sostenuto dalla pressione degenere dei quark).

### 2.2.1 Limite di Chandrasekhar

Eguagliando la Pressione di Degenerazione alla Pressione Gravitazionale si può trovare la Massa limite che la Degenerazione elettronica può sostenere, detta

*Massa di Chandrasekhar:*

$$M_{Ch} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{8} \left( \frac{hc}{G} \right)^{3/2} \left( \frac{Z}{A} \frac{1}{m_H} \right)^2 \approx 1,44(1+X)^2 M_{\odot} \quad (2.13)$$

Nella maggior parte dei casi, l'abbondanza di Idrogeno in una nana bianca è trascurabile, per cui si può ragionevolmente affermare che  $M_{Ch} \approx 1,44 M_{\odot}$ .

In modo analogo possiamo ricavare un'equazione che unisca la massa della nana bianca al suo raggio:

$$M_{NB} R_{NB}^3 = \frac{(18\pi)^2}{10^3} \frac{\hbar^6}{(Gm_e)^3} \left( \frac{Z}{A} \frac{1}{m_H} \right)^5 = cost \quad (2.14)$$

Come si può notare, più è grande la sua massa, più piccolo sarà il suo raggio; aumentando la massa di una nana bianca si aumenterà quindi maggiormente la sua densità.

Le nane bianche sono degli oggetti di dimensioni paragonabili a quelle della Terra ( $r \approx 10^9 cm$ ), massa simile a quella del Sole ( $M \approx 10^{33} g$ ) e densità dell'ordine dei ( $\rho \approx 10^6 g/cm^3$ ). Esse hanno una struttura interna praticamente isoterma, poichè lo scambio di calore avviene principalmente per conduzione elettronica, favorita dalla Degenerazione, che tiene occupati i livelli energetici inferiori innalzando il libero cammino medio delle particelle. La superficie di una nana bianca è molto sottile e non degenere, quindi perde energia più lentamente; la sua luminosità  $L_{NB}$  in funzione del tempo è descritta dalla *Legge di Mestel*:

$$L_{NB} = L_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{t}{\tau_0} \right)^{-\frac{7}{5}} \quad (2.15)$$

Le nane bianche si raffreddano molto lentamente, mantenendo il loro raggio praticamente costante, e seguendo le cosiddette *cooling sequences*. Nel calcolare il tempo di raffreddamento, bisogna tener conto di un fenomeno chiamato *cristallizzazione*: i nuclei all'interno della nana bianca tendono a disporsi in un reticolo cristallino ordinato (lattice cristallino), minimizzando la propria energia, che rimane solo vibrazionale, con oscillazioni attorno ai punti di equilibrio. Ogni nucleo rilascia un'energia pari a  $\approx kT$ , rallentando il raffreddamento della nana bianca.

In generale, possiamo descrivere il tempo di raffreddamento in funzione di massa, luminosità e composizione chimica tramite la formula

$$t_{cool} = 8.8 \cdot 10^6 \left( \frac{A}{12} \right)^{-1} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{5}{3}} \left( \frac{\mu}{2} \right)^{-\frac{2}{7}} \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-\frac{5}{7}} \text{ anni} \quad (2.16)$$

dove  $\tau_0$  è il tempo scala di raffreddamento dalla Temperatura iniziale  $T_0$ .

Per le stelle di neutroni vi è invece il limite di Oppenheimer-Volkoff, più alto di

quello di Chandrasekhar, ottenuto con il medesimo procedimento:  $M_{O-V} \approx 3 M_{\odot}$ . Anche in questo caso, come per le nane bianche, si può ricavare una relazione massa-raggio:

$$M_{SN} R_{SN}^3 = \frac{\hbar^6}{m_H} \frac{\frac{4}{3}\pi}{(2\pi G)^3} = cost \quad (2.17)$$

Stelle di neutroni di massa maggiore hanno dimensioni più ridotte e densità più alte. La spiegazione fisica del fenomeno è da ricercarsi proprio nella Pressione di Degenerazione: per sostenere una massa più grande, i neutroni hanno bisogno di una densità più elevata, e dunque di un raggio minore. Per le stelle di neutroni si hanno raggi compresi tra i 10 ed i 15 Km, masse poco più alte della Massa di Chandrasekhar e densità dell'ordine dei  $10^{14} \text{ g/cm}^3$ , lo stesso ordine di grandezza dei nuclei atomici.

### 2.2.2 Supernovae di tipo Ia

Si supponga di avere una sistema binario, composto da una nana bianca composta da Carbonio e Ossigeno e una stella compagna, poco più grande del Sole. Ciascuno dei due oggetti si trova nel proprio Lobo di Roche (una superficie equipotenziale, in questo caso a forma di goccia), e i due lobi si intersecano nella retta congiungente dei due corpi, precisamente nel punto Lagrangiano  $L1$ . All'interno del proprio lobo di Roche, ogni corpo è soggetto alla sua sola Forza di Gravità, ma all'esterno del lobo si è soggetti anche all'attrazione gravitazionale dell'altro corpo. Quando la stella evolve in Gigante Rossa, il suo raggio può aumentare tanto da raggiungere o superare il confine del lobo: allora, attraverso il punto  $L1$  parte della materia della stella compagna va ad accrescere la massa della nana bianca. Questo processo dura fintantochè la massa della nana bianca non supera il limite di Chandrasekhar: la Forza di Gravità vince la Pressione di Degenerazione comprimendo il corpo, e le Temperature si fanno talmente elevate da accendere le reazioni di fusione, che in un nucleo di Carbonio e Ossigeno in stato degenere sono talmente violente da fare esplodere tutta la stella.

Un altro possibile scenario è una binaria formata da due nane bianche, le cui masse sommate superano il limite di Chandrasekhar: perdendo energia tramite emissione di onde gravitazionali, le loro orbite sarebbero sempre più strette, fino alla fusione dei due corpi.

Le *Supernovae Ia*, come sono denominate, non lasciano nessun *reinmant* e hanno luminosità paragonabili alle galassie che le ospitano ( $L_{picco} = 10^{43} \text{ erg/s}$  per due settimane). Hanno tutte la stessa curva di luce e la stessa Magnitudine Assoluta di picco ( $M = -19.6$ ) in ragione del loro meccanismo di innesco, ed essendo visibili anche a grandissime distanze, sono perfette Cande Standard per il calcolo delle distanze astronomiche.

# Bibliografia

- [Big05] G. F. Bignami. *L'Universo vol.I*. Federico Motta Editore S.p.A., 2005.
- [Fe11] F. R. Ferraro. *Evoluzione stellare*, 2011.
- [Fer12a] L. Ferrari. *Elementi di termodinamica statistica*, 2012.
- [Fer12b] F. R. Ferraro. *Astrofisica Stellare, struttura delle stelle*. 2012.